

1971 г. сентябрь – октябрь

т. XXVI, вып.5 (161)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КАК ПИСАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕКСТЫ ¹

П. Р. Халмош

0. Предисловие
1. Верный способ хорошо писать, которого не существует
2. Говорите нечто определенное
3. Говорите, обращаясь к кому-нибудь определенному
4. Сначала организуйте материал
5. Подумайте об алфавите
6. Пишите по спирали
7. Занимайтесь расположением материала постоянно
8. Пишите хорошим английским языком
9. Честность – лучшая политика
10. Долой все тривиальное и несущественное
11. Повторяйтесь и не повторяйтесь
12. Книжное «мы» не всегда плохо
13. Правильно используйте слова
14. Правильно пользуйтесь техническими терминами
15. Воздерживайтесь от обозначений
16. Правильно используйте обозначения
17. Всякое сообщение требует организации
18. Отстаивайте свой стиль
19. Поставьте точку
20. Заключительное слово

0. Предисловие. Это – субъективно написанный очерк с обманчивым названием; вернее было бы назвать его *как я пишу математические тексты*. Он возник в связи с одной комиссией Американского математического общества, в которой мне пришлось недолгое время работать, но скоро превратился в увлекательное частное предприятие. Пытаясь поставить его под контроль, я обратился с просьбой к нескольким друзьям прочитать эту работу и высказать свою критику. Критические замечания были великолепны; резкие, честные и конструктивные, они противоречили друг другу. «Мало конкретных примеров», – говорил один. «Не соглашайтесь увеличивать число примеров», – говорил другой. «Уж очень длинно», – говорил один. «Может, написать побольше», –

говорил другой. «Существуют, – говорил один, – традиционные (и эффективные) методы сведения к минимуму утомительности длинных доказательств, например, подразделение их на серию лемм». «Что выводит меня из себя, – говорил другой, – так это привычка, особенно у новичков, представлять доказательство в виде длинного ряда тщательно сформулированных и смертельно скучных лемм».

Лишь в одном соглашалось большинство моих советчиков: писать такой очерк – заведомо неблагодарная работа. Советчик 1: «Сделав свою вторую работу, любой математик убежден, что уже знает, как писать статьи, и с раздражением реагирует на советы». Советчик 2: «По-моему, все мы в глубине души уверены, что могли бы отлично писать, если бы только постарались. Даже те, кто придерживаются очень скромного мнения о своих математических способностях, выходят из себя, если усомниться в их литературном даровании». Советчик 3 воспользовался самым суровым языком; он предупредил меня о том, что так как я наверняка не смогу проявить значительную интеллектуальную глубину в обсуждении вопроса о технике написания текстов, мне не следует удивляться «насмешкам, которые Вы сможете снискать у некоторых из наших высокомерных коллег».

Мои советчики – маститые, хорошо известные математики. Если бы я назвал здесь их имена, это ничего не прибавило бы к их научной репутации; с другой стороны, я мог неверно их понять и не так применить их советы, что могло бы вызвать досаду и смущение этих людей. Вот почему я решился на непринятый в науке прием безименных цитат и выражения благодарностей без адреса. От этого моя благодарность не стала меньше, как и не уменьшилось желание признать, что без их помощи этот очерк был бы хуже.

«Hier stehe ich, ich kann nicht anders»².

1. Верный способ хорошо писать, которого не существует. Я думаю что мог бы кое-кому рассказать о том, как писать, но кто захотел бы это слушать? Способность к эффективной передаче информации, власть быть понятным – вещи, по-моему, врожденные, или, во всяком случае, столь рано приобретаемые, что чтение моих размышлений на означенный предмет, вероятно, ни на кого уже не сможет повлиять. Нельзя научиться понимать силлогизм – вы либо рождаетесь с такой способностью либо без нее. Точно так же нельзя научить умению эффективно объяснять: один обладает им, другой – нет. Верного способа хорошо писать не существует.

Зачем же продолжать? Ну, я немного надеюсь на то, что сказанное мной не совсем верно, и уж во всяком случае хочу попытаться счастья и добиться того, чего, быть может, и нельзя добиться. Причина более прозаическая состоит в том, что в других областях, требующих природного таланта, даже одаренные люди, родившиеся с ним, обычно не рождаются со знанием всех тонкостей профессии. Несколько таких очерков, как этот, могли бы способствовать «напоминанию» (в смысле Платона)³ тем, кто хочет и кому суждено излагать математику будущего, той техники, которую нашли полезной авторы прошлого.

Основная проблема, возникающая при написании математических текстов, – та же, что и при написании текстов по биологии, при сочинении романа или инструкции по сборке клавиатур: это – проблема сообщения идеи. Чтобы

сообщить ее, и сообщить ясно, вы должны иметь нечто, что хотели бы сказать, и иметь кого-нибудь, кому это сказать; вы должны организовать то, что собираетесь сказать, вы должны привести это в тот порядок, в котором хотите говорить, вы должны это написать, переписать и еще несколько раз переписать, и вы должны крепко подумать и много поработать над такими техническими деталями, как стиль, обозначения, пунктуация. Вот и все.

2. Говорите нечто определенное. Может показаться излишним настаивать на том, что для того, чтобы хорошо что-нибудь сказать, нужно иметь, что сказать; однако, это не шутка. Масса плохой математической и всякой другой литературы плоха тем, что грубо нарушает это первейшее правило. Последовательность расходится лишь в двух случаях: либо у нее нет ни одной предельной точки, либо их слишком много. Точно так же беспредметный текст может получиться либо при полном отсутствии идей либо при их чрезмерном количестве.

Первую болезнь подхватить труднее. Тяжело написать много слов ни о чем, особенно в математике, но сделать это можно и результат наверняка окажется трудным для чтения. Имеется классическая вздорная книга Карла Теодора Хэйзеля [5], способная служить примером тому. Она полна правильно написанных слов, составляющих грамматически корректные предложения, но заглядывая в нее время от времени вот уже тридцать лет, я ни разу не смог прочесть в ней подряд двух страниц и в одном абзаце резюмировать их содержание. Я думаю, это потому, что там нет никакого содержания.

Вторая болезнь распространена очень широко; многие книги погублены желанием автора сказать слишком многое. Преподаватели элементарной математики в США нередко жалуются на то, что все курсы анализа плохи. Так оно и есть. Книги по анализу плохи потому, что математического анализа, как предмета, не существует. Это – не предмет, а множество предметов. Что сегодня мы называем анализом? Немного логики и теории множеств, доля аксиоматической теории полных упорядоченных полей, аналитической геометрии и топологии, причем последней как в «общем» смысле (пределы и непрерывные функции), так и в алгебраическом (ориентация); к этому нужно еще добавить собственно теорию функций действительного переменного (дифференцирование), оперирование комбинаторными символами, называемое формальным интегрированием, азы теории меры в низшей размерности, кое-что из дифференциальной геометрии, основы классического анализа тригонометрических, показательных и логарифмических функций; наконец, в зависимости от объема книги и наклонностей автора, домашняя стряпня из дифференциальных уравнений, элементарная механика и приложения в небольшом ассортименте. По каждому из этих предметов нелегко написать хорошую книгу; смешать же их невозможно.

Маленькая жемчужина, которую представляет собой доказательство Нельсона теоремы о постоянстве ограниченной гармонической функции [7], и монументальный трактат Данфорда и Шварца по функциональному анализу [3] доставляют примеры математических сочинений, которым есть что сказать. Работа Нельсона занимает меньше, чем полстраницы, а книга Данфорда-Шварца в четыре тысячи с лишним раз длиннее ее; однако, в обоих случаях ясно, что

авторы твердо знали, что хотели сказать. Предмет существует и очерчен четко; он ловко скроен и крепко сшит – есть о чем говорить.

Говорить нечто определенное – это, безусловно, важнейшая составная часть хорошего изложения; ведь чем важнее идея, тем больше шансов на бессмертие у работы, даже если материал подан запутанно и организован плохо. Доказательство Биркгофа эргодической теоремы [1] запутано почти до предела, а «последнее письмо» Ванцетти [9] написано сбивчиво и неуклюже; но наверняка всякий, кто читал их, благодарен тому, что они написаны. Однако ограничиться соблюдением только этого принципа удастся редко, и это всегда нежелательно.

3. Говорите, обращаясь к кому-нибудь определенному. Второй принцип хорошего изложения – обращаться к определенному слушателю. Решаясь что-либо написать, спросите себя, кому бы вы хотели это адресовать? Пишете ли вы заметку, предназначенную только для себя, или письмо другу? Научное сообщение для специалистов или учебник для студентов последнего курса? По существу, трудности во всех случаях одинаковы. Меняется количество необходимых мотивировок, уровень неформальности, который вы можете себе позволить, степень скрупулезности в деталях и число повторений. Читатели влияют на все, что пишется, но уж когда читатели выбраны задача автора – войти в контакт с ними настолько тесный, насколько это возможно.

Издатели знают, что двадцать пять лет для большинства математических книг – возраст почтенно старый; научные статьи отживают, в среднем (предположительно) через пять лет. (Разумеется, могут быть полные жизни пятидесятилетние статьи и книги, умирающие пяти лет от роду.) Конечно, математическое сочинение слишком эфемерно, чтобы быть долговечным, но если вы хотите донести свою работу до сегодняшней аудитории, писать ее надо так, как если бы это делалось на века.

Я люблю представлять свою аудиторию не только в неопределенном общем плане (например, профессиональные топологи или студенты-второкурсники), но и очень конкретно, лично. Мне помогает, когда я думаю о некотором определенном человеке, с которым, быть может, два года назад я обсуждал эту тему, или о нарочно притворившемся непонятливым друге-коллеге, которому я мысленно втолковываю то, о чем пишу. Например, в этом очерке я рассчитываю пронять молодых студентов-математиков, которые вот-вот начнут делать диссертации, но в то же время мысленно кошусь на одного коллегу, чьи манеры еще могут исправиться. Конечно, я надеюсь, что (а) он переймет мои манеры, но (б) не обидится, когда осознает, что я пишу для него.

Есть свои преимущества и недостатки в обращении к очень точно определенной аудитории. Чтение чужих мыслей, без которого не обойтись, сильно облегчается – это большое преимущество; однако появляется соблазн ввязаться в бесцельную полемику или тяжеловесно острить «для своих». Это – недостаток. Наверняка всякому ясно, почему это – недостаток. Избегайте его. Преимущество же заслуживает дальнейшего рассмотрения.

Долг автора – предвидеть затруднения читателя и избавлять его от них. Во время работы ему следует постоянно пытаться представить себе, какие из написанных слов могут ввести читателя в заблуждение, и какие ориентируют

его верно. Позднее я приведу один-два примера по этому поводу; сейчас же мне хочется подчеркнуть, что представлять определенного читателя не только полезно в этой части писательской работы, но и жизненно важно.

Быть может, это и так ясно, но все-таки невредно отметить, что аудитория, к которой в действительности окажется адресованной работа, может значительно отличаться от предполагаемой. Нет ничего, что гарантировало бы удачный выбор цели. И несмотря на это, еще раз повторяю: лучше иметь определенную цель и при этом попасть во что-нибудь другое, чем иметь цель слабо определенную и чересчур широко очерченную и не иметь шансов попасть во что бы то ни было. К плечу, целься, пли! И авось вы поразите мишень – хорошо, если ту, в которую вы целились, а если не ту, – то все равно это лучше, чем слать пули в молоко.

4. Сначала организуйте материал. Главное, что может сделать автор научного текста, состоит в такой организации и такой подаче материала, при которых сводится к минимуму сопротивляемость читателя, максимально возбуждается его интуиция, и он идет по верному пути, не отвлекаясь без нужды. Чем, в конце концов, книга лучше кипы препринтов? Ответ: умелой и приятной подачей материала, акцентами в нужных местах, выявлением внутренних связей, описанием примеров и контрпримеров, на которых основана теория; одним словом, – организацией материала.

Открыватель идеи, который, конечно, может быть и автором статьи о ней, наткнулся на нее вслепую, почти случайно. Если бы не существовало способа привести все это в порядок, причесать и пригладить открытие, то не было бы никакой возможности извлекать пользу из «стояния на плечах гигантов» и не было бы времени изучить что-либо новое, неизвестное предыдущему поколению.

Как только вы уяснили, что и кому хотите сказать, приступайте к следующему этапу: сделайте набросок. По моему опыту это, как правило, невозможно. Идеал состоит в том, чтобы сделать набросок, где упоминается каждое предварительное эвристическое рассуждение, каждая лемма, каждая теорема, каждое следствие, каждое замечание, каждое доказательство и в котором все эти части появляются в логически корректном и психологически легко усваиваемом порядке. При идеальном подборе материала всему находится место и все находится на месте. Внимание читателя удерживается тем, что ему заранее сказали, чего ожидать; одновременно, в видимом противоречии с этим, происходят приятные неожиданности, которых нельзя было предвидеть на основе бесплотных определений. В хорошем наброске все детали подогнаны, леммы появляются там, где они нужны, хорошо видны внутренние связи между теоремами. Набросок показывает, где это разместить.

Я делаю небольшое и, возможно, несущественное различие между организацией материала и его подачей. Организовать материал – это значит решить, какие заголовки будут у глав и параграфов, что будет в этих главах и как они будут связаны. Схема организации материала представляет собой некий граф, очень может быть, что дерево, но, почти наверняка, не цепь. Существует масса способов организовать те или иные материалы и, как правило, есть много способов преподнести читателю результаты каждой такой организации в

линейном порядке. Организация материала – вещь более важная, чем его подача, но последняя часто имеет психологическое значение.

Один из самых заслуженных комплиментов автору, которые я когда-либо высказывал, возник из моей неудачи: я провалил курс лекций по его книге. Началось это вот с чего: мне не понравился один параграф, и я его пропустил. Тремя разделами позже мне понадобился небольшой кусочек из самого конца опущенного параграфа; однако нетрудно было дать другое доказательство. Такое случилось еще разок-другой, но всякий раз немного изобретательности и несколько понятий с потолка позволяли залатать брешь. Но вот в следующей главе появилось место, для которого требовались не фрагменты опущенного раздела, а то обстоятельство, что его результаты были приложимы к двум ситуациям, на первый взгляд совершенно различным. Оказалось почти невозможно наскоро заделать пробоину; после этого быстро воцарился хаос. Настолько плотно подогнанной была эта книга: все, что было включено в нее, включалось по необходимости; материал подавался в ней во взаимосогласованности своих частей, что облегчало чтение и понимание. Однако скрепы, соединявшие все в единое целое, не бросались в глаза; они становились заметными только после вторжения в структуру той или иной части.

Даже самые неорганизованные авторы делают грубый набросок будущей книги, возможно, и не записывая его; в конце концов, тема сама по себе является наброском в одно слово. Если вы знаете, что будете писать о теории меры, то у вас есть набросок в два слова, а это уже кое-что. Пробный набросок по главам еще лучше. Он может выглядеть так: я расскажу им о множествах, потом – о мерах, потом – о функциях, потом – об интегралах. На этой стадии вы захотите принять кое-какие решения, которые, однако, позднее можно и отменить. Например, вы можете решить, что опустите теорию вероятностей, но включите меру Хаара.

В некотором смысле подготовка наброска может занять годы, или, по крайней мере, много недель. Что касается меня, то обычно между первым радостным моментом, когда я задумываю написать книгу, и первым мучительным моментом, когда я сажусь и начинаю это делать, лежит долгий промежуток. Во время повседневной работы ради насущного хлеба с маслом я мечтаю о новом замысле, и когда по этому поводу приходят идеи, я записываю их на разрозненных листочках бумаги и складываю, как попало, в папку. «Идея» здесь может означать название области математики, которую, по моим ощущениям, следует включить, или же выбор буквы для некоторого обозначения; ею может быть доказательство, выразительное слово или острота, которая, я надеюсь, не окажется пошлой, а оживит, подчеркнет и проиллюстрирует то, что я хочу сказать. Когда же наступает тот самый мучительный момент, у меня, во всяком случае, есть та самая папка. Раскладывание пасьянса из клочков бумаги может оказать большую помощь в подготовке наброска.

При организации текста вопрос о том, что опустить, едва ли не важнее, чем вопрос о том, что включить. Изобилие деталей может так же обескураживать, как и их отсутствие. Расстановка всех точек над всеми i , как это принято в

старомодных Cours d'Analyse – вообще, и в курсе Бурбаки – в частности, удовлетворяет лишь автора, который этот курс все равно понимает, да беспомощно слабого студента, который никогда его не поймет. Для более вдумчивых читателей такие вещи более чем бесполезны. Сердце математики состоит из конкретных примеров и конкретных проблем. Большие общие теории появляются обычно после обдумывания маленьких, но глубоких суждений; сами же суждения начинаются с проникновения в конкретные частные случаи. Мораль: лучше всего расположить материал вашей работы вокруг центральных, решающих примеров и контрпримеров. Если какое-нибудь доказательство устанавливает немножко больше, чем то, ради чего оно изобреталось, обычно это можно оставить читателю. Где читателю действительно нужно опытное руководство, так это в обнаружении тех вещей, которых имеющиеся доказательства не доказывают: каковы подходящие к данному случаю контрпример и куда плыть дальше?

5. Подумайте об алфавите. Когда у вас появился план расположения материала, какой-нибудь набросок, может и не блестящий, но лучшее, что вы смогли" сделать, – вы почти готовы начать писать. Единственное, что я еще порекомендовал бы сделать до этого: потратьте часок-другой на размышления об алфавите; позднее это спасет вас от многих страданий.

Буквы, которые вы используете для обозначения обсуждаемых понятий, заслуживают тщательных предварительных размышлений. Хорошая, последовательная система обозначений может быть чрезвычайно полезна, и я призываю (авторов статей, но особенно – авторов книг) решать вопрос о ней с самого начала. Лично я делаю огромные таблицы с многочисленными алфавитами и шрифтами, строчными и прописными, и пытаюсь представить себе все пространства, группы, векторы, функции, точки, поверхности, меры и все остальное, что раньше или позже придется окрестить. Плохая система обозначений может сделать хорошее изложение плохим, а плохое – еще ухудшить; решения об обозначениях, принимаемые наспех посреди фразы, почти наверняка будут плохими.

Хорошая система обозначений обладает своеобразной алфавитной гармонией и уклоняется от диссонансов. Пример: $ax+by$ или $a_1x_1+a_2x_2$ лучше, чем ax_1+bx_2 . Или: если вам приходится использовать символ Σ для обозначения множества индексов, убедитесь, что вы не влипните в $\Sigma_{\sigma \in \Sigma} a_\sigma$. Предостережение в том же стиле: вероятно, многие читатели не заметят, что вы использовали символ $|z| < \epsilon$ вверху страницы, а внизу – символ $z \in U$, однако, это – почти диссонанс, из-за которого читателя охватывает смутное, нелокализованное чувство неудобства. Лекарство – простое, и уже почти общепринятое: символ \in сохраняется для выражения принадлежности элемента множеству, а ϵ – для всего остального.

Математике доступен потенциально бесконечный алфавит (например, x, x', x'', x''', \dots); однако, на практике используется только небольшая его часть. Одна причина этого явления заключается в том, что человеческая способность различать символы ограничена намного сильнее, чем способность изобретать новые. Другой причиной является дурная склонность к замороженным буквам.

Какой-нибудь старомодный аналитик будет говорить «хуз-пространство», подразумевая, как мне думается, 3-мерное евклидово пространство, плюс соглашение о том, что точка этого пространства всегда будет обозначаться через (x, y, z) . Это – плохо; это «замораживает» букву x , и букву y , и букву z , и мешает обозначать ими что-нибудь другое; в то же время оказывается невозможным (или, во всяком случае, непоследовательным) использовать, скажем, символ (a, b, c) после изнуренного многократным применением символа (x, y, z) . Имеются и современные варианты этой привычки; они не лучше. Пример: матрицы «со свойством L » – замороженное и невыразительное обозначение.

Существуют и другие неуклюжие и не помогающие воображению способы употребления букв; вот примеры: « SW -комплексы», « CCR -группы». Курьез, доставляющий вероятно, верхнюю границу во множестве бесполезных использовании букв, встречается в книге Лефшетца [6]. Символ x^p обозначает там цепь размерности p (нижний значок, таким образом, – это индекс), тогда как через x_p^i обозначается коцепь размерности p (так что индекс здесь – это верхний значок).

Вопрос: что такое x_3^2 ?

С течением времени все больше и больше букв оказываются замороженными. Стандартные примеры: e, i, π и, конечно, $0, 1, 2, 3, \dots$ (Кто осмелится написать: «Пусть 6 – некоторая группа»?) Несколько других букв – почти заморозились: многие читатели почувствовали бы обиду, если бы n обозначало комплексное число, ε – положительное целое число, z – топологическое пространство. (Кошмар математика: последовательность n_ε , стремящаяся к 0 , когда ε стремится к бесконечности.)

Мораль: не вносите своего вклада в косность. Думайте об алфавите. Это скучновато, но результат того стоит. Чтобы спасти время и уберечься от волнений в дальнейшем, подумайте с часок над алфавитом теперь; после этого начинайте писать.

6. Пишите по спирали. Лучший и, возможно, единственный способ писать – писать по спирали. Это означает, что главы пишутся и переписываются в следующем порядке: 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4 и т.д. Скажем, вы полагаете, что вам уже известно, как писать главу 1; но после того, как вы это сделали и перешли к главе 2, вам стало ясно, что глава 2 могла бы быть лучше, если бы глава 1 была сделана иначе. Ничего не поделаешь – возвращайтесь назад, напишите ее по-другому, улучшите главу 2 и затем – с богом в главу 3. И, конечно, вы уже знаете, что произойдет дальше: глава 3 обнаружит слабость первой и второй глав; ничего не поделаешь – и т.д. и т.д. и т.д. Такова почти очевидная и зачастую неизбежная идея, но она помогает будущему автору осознать заранее, с чем он столкнется, учесть, что то же явление будет встречаться не только на уровне глав, но и на уровне параграфов, абзацев, фраз и даже слов.

Первым шагом в процессе написания и многократного переписывания книги является написание само по себе. Если есть тема, аудитория, набросок (и, не забудьте! алфавит), начинайте писать книгу и ничто да не остановит вас. Ничто так не вдохновляет написать хорошую книгу, как плохая книга. Когда у вас в руках первый эскиз книги, написанный по спирали, нацеленный на некоторую

аудиторию и подкрепленный таким подробным наброском, какой вам оказался по силам, ваша книга более чем наполовину готова.

Спиральный план ответствен за бóльшую часть работы по многократному переписыванию, но не за всю работу. В первом наброске каждой главы изливайте душу, пишите быстро, забыв о правилах, с ненавистью или с гордостью, будьте бессвязным, «странным», – если это вам нужно, – неясным, неграмотным, но только не отрывайтесь от работы. Однако когда возникает нужда в следующем варианте, все равно, в который раз, – не редактируйте то, что уже готово, – пишите заново. Соблазнительно воспользоваться красным карандашом для указания вставок, вычеркиваний и перестановок; в моей практике, однако, это приводит к катастрофическим ошибкам. Против человеческой нетерпеливости и общераспространенной склонности к собственным словам красный карандаш – слишком ненадежное оружие. Итак, вы смотрите на первый эскиз, который любой читатель – только не вы – найдет невыносимым; вы должны безжалостно править и вычеркивать. Переписать – это значит написать заново каждое слово.

Я не хочу сказать, что в книге из десяти глав первую главу следует переписать десятикратно, но три-четыре раза – наверняка. Скорее всего, главу 1 придется переписать буквально заново, едва закончив главу 2 и, очень может быть, еще хоть раз где-то после главы 4. Десятую главу, к счастью, вам придется переписать лишь однажды.

Моя собственная практика может дать вам представление об общем количестве переписываний, о которых идет сейчас речь. После написанного по спирали первого наброска я обычно переписываю всю книгу, а потом добавляю необходимый для читателя вспомогательный аппарат (список предварительных требований, предисловие, алфавитный указатель и оглавление – это уже машинальная работа). Затем я переписываю все вновь, на этот раз на пишущей машинке или, во всяком случае, настолько аккуратно и красиво, чтобы машинистка без математического образования могла без затруднений использовать этот вариант (третий, в некотором смысле) для подготовки «окончательной» машинописной рукописи. Переписывание на третьем заходе минимально; оно обычно ограничивается изменениями отдельных слов, или, в худшем случае, отдельных фраз. Третий вариант – это первый вариант, который видят другие. Я прошу друзей прочитать его, его читает моя жена, мои студенты могут читать отдельные его части, и – это лучше всего! – студент младшего курса, побуждаемый к хорошей работе приличной оплатой, приглашается быть безжалостным критиком написанного.

Изменения, в которых возникает необходимость после третьего варианта, если повезет, можно вносить красным карандашом; если не повезет, треть страниц из-за этого нужно будет перепечатать. «Окончательная» машинописная рукопись основана на отредактированном третьем варианте и, после того как она готова, ее читают и правят, и правят заново. Приблизительно через два года после начала работы (два рабочих года! Они могут быть намного длиннее двух календарных лет...) книга отсылается в издательство. Потом начинаются новые трудовые муки; однако это уже совсем другая история.

Архимед научил нас, что много раз понемногу – это много (говоря языком пословицы, капля камень долбит). Я убежден, что когда выполняется какая-нибудь большая работа, в частности, пишется книга, верно и обращение этого архимедова принципа: единственный способ написать большую книгу – писать понемножку, но с неослабевающим упорством каждый день без исключения, без отпуска. Хороший способ сохранять производительность труда – заканчивать каждый день, заправившись горючим на завтра. С чего вы начнете завтра? Что будет в следующем параграфе? Как его назвать? (Я рекомендовал бы подыскивать возможно короткие названия для каждого раздела до или после того как он написан; даже если вы не собираетесь печатать названия разделов. Цель такого занятия – в проверке того, насколько хорошо спланирован параграф: если вы не можете его озаглавить, возможно, он не имеет единого, цельного сюжета.) Иногда первую завтрашнюю фразу я записываю сегодня; некоторые авторы начинают сегодняшнюю работу проверкой и переписыванием вчерашней последней страницы. Во всяком случае, заканчивайте каждую порцию работы на подъеме, а между порциями давайте своему подсознанию какую-нибудь солидную пищу. Поразительно, как эффективно удается перехитрить себя таким способом; техника подготовки достаточна для преодоления естественного человеческого отвращения к творческой работе.

7. Занимайтесь расположением материала постоянно. Даже в том случае, если исходный план расположения материала в вашей книге разработан до мелочей и хорош (и, особенно, если это не так), важнейшая забота о порядке изложения не ослабевает и после того как вы начали писать; она сохраняется, пока вы пишете книгу и даже после.

Спиральный план написания и спиральный план выбора расположения материала идут рука об руку; последний часто (а может быть и всегда) приложим к математическим сочинениям. Происходит это так. Вы начинаете с чего-то, что избрали своим основным понятием, скажем, векторных пространств, – и действуете по всем правилам: даете мотивировки, определение, примеры и контрпримеры. Таков параграф 1. Во втором параграфе вы вводите первое, связанное с основным, понятие, которое вы собираетесь изучать, скажем, – линейную зависимость, и опять действуете по всем правилам: даете мотивировки, определение, примеры и контрпримеры, а потом – и вот здесь-то самое главное – вы пересматриваете настолько подробно, насколько можете, параграф 1 с точки зрения параграфа 2. Ну, скажем, какие примеры линейно зависимых и независимых множеств легко получаются из примеров векторных пространств, введенных в §1? (Здесь, между прочим, возникает другая понятная причина, по которой писать приходится по спирали: во втором параграфе вам могут прийти в голову примеры линейно зависимых и независимых множеств в тех векторных пространствах, которые вы забыли преподнести в качестве примеров в §1). В третьем параграфе вы вводите следующее понятие (какое именно – следовало тщательно обдумать раньше, но чаще им оказывается то, чего требует крутой поворот мысли, – это опять-таки подтверждает необходимость писать спирально) и после его обычной обработки пересматриваете §1 и §2 с точки зрения нового понятия. Система работает чудесно! Делать это – легко, весело, а результат – приятно читать: читателю

помогают крепко сработанные вами строительные леса, даже если он не рвется сам осмотреть опоры и прощупать стыки.

Фабулы и повороты сюжета исторических романов, улики и намеки детективных рассказов – все это имеет свои математические аналогии. Поясним примером: многое из теории метрических пространств могло бы быть развито как «подсюжет» в какой-нибудь книге по общей топологии в виде скромных замечаний, заключенных в скобки фраз и иллюстративных упражнений. Такая организация материала в противовес неумолимой общности дала бы читателю прочные обоснованные мотивировки и более глубокое понимание без видимых дополнительных усилий. А вот пример по поводу детективных намеков: единственное слово, впервые упомянутое за несколько глав до своего определения, а потом повторяемое со все более пространными комментариями по мере того, как приближается его формальное представление, может незаметно и подсознательно подготовить восприятие. Такая процедура может серьезно помочь читателю. В то же время и значительно облегчить формальную работу автора, которому, правда, придется сильно увеличить усилия мысли, затрачиваемые на организацию неформального текста. Игра стоит свеч. Если вы работаете восемь часов, чтобы спасти пять минут читательского времени, то вы сберегаете более восьмидесяти человеко-часов на каждую тысячу читателей, и ваше имя будет благословенно во многих факультетских коридорах. Но не забывайте: для эффективного использования подсюжетов и намеков необходимо нечто очень похожее на спиральный план организации.

Последний по порядку и важности, но все равно очень важный аспект, который стоит упомянуть здесь, состоит в правильной подаче математического текста с чисто логической точки зрения. Немногому здесь один математик может научить другого; следует лишь предупредить о том, что с увеличением размеров работы ее сложность растет в устрашающей пропорции. Однажды я писал книжку страниц на 300; на одном из этапов работы у меня оказалось 1000 листов бумаги с каким-нибудь математическим утверждением на каждом: с теоремой, леммой или даже второстепенным замечанием, и все это с полными доказательствами. Листы были перенумерованы как попало. Моя забота состояла в указании на каждом из них номеров листов с теми утверждениями, которые логически должны были предшествовать данному; после этого я располагал листы в линейном порядке так, чтобы ни один из них не следовал за тем, на котором упоминался. По-видимому, эта проблема имеет несчетное множество решений; трудность состояла в том, чтобы выбрать из них наиболее эффективное и приятное.

8. Пишите хорошим английским языком. Все, что я говорил до сих пор, относилось к стратегии письма; пора обратиться к локальным аспектам предмета.

Почему автор не имеет права написать слово «continuous»⁴ так: «continous»? Ведь наверняка он не будет неверно понят, а в таком написании буквой меньше... Так почему же? С ответом, вероятно, согласится любой, даже самый вольномыслящий из современных лингвистов: как только вводится такая «реформа», происходит вынужденное отвлечение внимания и поэтому – лишняя трата времени, которой не стоит полученная «экономия». Случайный пример,

вроде только что приведенного, возможно, не слишком убедителен. Большое количество читателей согласилось бы с тем, что целая книга, написанная по реформированному правописанию (согласно которому, например, следует писать «izi» вместо «easy»⁵), едва ли оказалась бы эффективным инструментом для образования⁶. Какими бы не были преимущества реформы правописания, но слова, написанные с несоблюдением принятых словарных стандартов, мешают книге оказать должное воздействие: они задерживают, отвлекают внимание, иногда смущают и раздражают читателя.

Речь зашла здесь о правописании не потому, что в нем заключается распространенная или серьезная опасность для большинства авторов: на еп. примере можно показать и подчеркнуть гораздо более существенные вещи. Мне хотелось бы убедить вас, что важно писать математические книги (а также статьи, письма, лекции) хорошим английским языком, где слово хороший означает «соответствующий общепринятым современным стандартам правописания». (Французские, японские или русские авторы! Пожалуйста, подставьте вместо слова «английским» слово «французским», «японским» или «русским».) Я вовсе не считаю, что стиль должен быть педантичным, или тяжеловесным, или формальным, или казенным, или красочным, или академическим жаргоном. Я убежден, что он должен быть совершенно ненавязчивым, как хорошее музыкальное сопровождение в фильме; он должен быть таким, чтобы читатель мог двигаться вперед без осознанных или неосознанных помех, вызванных формой сообщения, а не его содержанием.

Требования хорошего английского стиля включают в себя грамматическую правильность, выбор точных слов, корректную пунктуацию и, вероятно, самое главное, – соответствие здравому смыслу. Существует разница между «that» и «which», между «less» и «fewer»; хороший автор математического текста должен знать такие вещи. Читатель, возможно, не в состоянии определить эту разницу, но сотня страниц, написанных неправильным разговорным языком, производит накапливающийся разрушительный эффект, который наверняка не входил в намерения автора. Словари Фаулера [4], Роже [8] и Вебстера [10] стоят на моей полке сразу за Данфордом-Шварцем; конечно, они находятся под рукой у любого другого автора. Маловероятно, что одна пропущенная запятая превратит правильное доказательство в неверное, но постоянное пренебрежение такими мелочами вырастает в крупный недостаток.

Английский язык может служить прекрасным и могучим средством передачи интересной, ясной и совершенно точной информации. Я уверен, что то же самое верно для французского, японского или русского языков. Для автора текста так же важно непринужденно пользоваться этим инструментом, как для хирурга – свободно владеть скальпелем. Евклида можно объяснить малограмотным и корявым языком; воспаленный аппендикс можно удалить ржавым карманным ножиком. Однако пострадавший, даже если он не осознает причины своих страданий, наверняка предпочел бы лучшее обращение с собой.

Все математики, даже совсем юные студенты, только начинающие математическое образование, знают, что математика имеет свой собственный язык (фактически, она сама является языком) и автор обязан владеть грамматикой и лексикой этого языка так же свободно, как своего родного.

Краткосрочных курсов языка математики не существует; наверное, единственный способ изучить его – прожить с ним годы. Нижеследующие соображения, конечно, не составляют (да и не могут составить) математического аналога Фаулера, Роже или Вебстера. Однако они могут подсказать дюжину-другую тысяч пунктов, которые следовало бы включить в такие словари.

9. Честность – лучшая политика. Хорошим математическим языком нужно пользоваться для того, чтобы облегчить читателю понимание предмета и, может быть даже, сделать процесс усвоения радостным. Такой стиль ценен не дешевым блеском, а предельной ненавязчивостью. Цель в том, чтобы сгладить путь читателя, предвидеть и предвосхищать его трудности. Ясность – вот что желательно, а не педантизм; понимание, а не суетливость по пустякам.

Категоричность этих требований, возможно, и необходимая, может быть неверно понята; спешу уточнить. Когда я говорю, что нужно избегать педантизма и суетливости, я вовсе не имею в виду строгость и аккуратность; я верю, что одно другому не противоречит и не помышляю советовать молодому автору мошенничать, пусть самую малость и очень остроумно, или заниматься затушевыванием трудностей. Иногда, например, результат получается после громоздких вычислений и ничего лучше придумать не удастся. В таком случае долг автора – публично выполнить эти вычисления; самое большее, что он может сделать для облегчения – выразить свое сострадание читателю какой-нибудь фразой вроде: «К сожалению, единственное известное доказательство состоит в следующем громоздком вычислении».

А вот пример того, что, на мой взгляд, является не вполне честным. Допустим, что в каком-то пункте изложения, бойко доказав некоторое предложение p , вы вдруг захотели сказать: «Заметим, однако, что из p не следует q », а потом, решив, что вы уже здорово все объяснили, благополучно перешли к другим вещам. Ваши побуждения могут быть при этом совершенно чистыми, однако читатель все равно вправе чувствовать себя обманутым. Если бы ему было все известно о вашем предмете, он не читал бы написанного вами; вполне возможно, что указанное вами отсутствие импликации ему не ясно. Что это – очевидно? (Тогда так и скажите.) Или позднее будут даны контрпримеры? (Тогда пообещайте их теперь же.) Может быть, это – стандартный факт, имеющийся в литературе, но для ваших нынешних целей несущественный? (Дайте ссылку.) А может быть, страшно сказать, вы попросту безуспешно пытались вывести q из p , да так и не узнали, следует ли q из p на самом деле? (Немедленно признайтесь!) В любом случае: окажите читателю полное доверие.

Нет ничего плохого в использовании многократно осмеянных оборотов «очевидно» и «легко видеть», однако, есть минимальные ограничения, которые следует соблюдать. Написав, что нечто очевидно, вы наверное так и думали. Но когда, спустя месяц, или два, или шесть вы вынули рукопись и перечитали ее заново, вы по-прежнему продолжаете так считать? (Дозревание в течение нескольких месяцев всегда улучшает рукописи.) Когда вы объясняли это другу или на семинаре, было ли это место воспринято как очевидное? (Или кто-нибудь задавал вопросы и усаживался ворча, после ваших уговоров? Вы его убедили или запугали?) Ответы на эти риторические вопросы ограничивают использование слова «очевидно». Есть еще и другое правило, главное; его знает

каждый; нарушение этого правила – самый частый источник математических ошибок; удостоверьтесь в том, что «очевидное» – верно.

Само собой разумеется, что вы пишете не для того, чтобы скрыть факты от читателя: вы пишете, чтобы раскрыть их. Я хочу этим сказать, что вы не должны утаивать от читателя истинного положения ваших утверждений в системе, как и вашего отношения к ним. Как только вы сообщаете что-нибудь, скажите читателю, было ли это уже доказано, или не было, будет ли это доказываться, или не будет. Подчеркивайте важное и сводите к минимуму тривиальности. Существует много хороших доводов в пользу очевидных утверждений, рассеянных там и сям по тексту, но об их очевидности нужно говорить, чтобы новичок видел их в должном свете. Даже если тот или иной читатель и рассердится на вас за это, вы поступаете правильно, сообщая ему вашу точку зрения на предмет. Но, конечно, вы должны подчиняться правилам. Не подводите читателя; он хочет вам верить. Претенциозность, обман и недомолвки могут обнаружиться не сразу, но большинство читателей вскоре почувствует, что что-то не так; тогда они будут винить не факты и не самих себя, а автора, как и должно быть. Абсолютная честность в изложении помогает максимальной ясности.

10. Долой все тривиальное и несущественное. Бывает так, что утверждение, очевидное настолько, что об этом и говорить не стоит, формулируется в плохой фразе, которая задерживает внимание, запутывает и смущает. Я имею в виду что-нибудь такое: «Пусть R – коммутативное полупростое кольцо с единицей и пусть $x, y \in R$; тогда $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ». Бдительный читатель начнет себя спрашивать, какое значение полупростота и единица имеют для того факта, который он всегда считал очевидным. Не относящиеся к делу предположения, бессмысленно втиснутые в текст, неверный акцент или даже отсутствие правильного акцента могут разрушить все изложение.

Отвлекающие и ненужные предположения служат причиной лишней траты читательского времени; почти столько же времени отнимает автор, не завоевавший доверия читателя явным упоминанием тривиальных случаев, или, если нужно, исключением их. Всякое комплексное число является произведением некоторого неотрицательного числа и некоторого числа с модулем 1. Это верно, но читатель будет себя чувствовать неуверенно, если сразу после сказанного (быть может, ему напоминали это по какому-нибудь поводу, перед введением очередного обобщения) ему не сообщили ничего о сомнительном поведении нуля (тривиальный случай). Дело не в том, что отказ от отдельного разбора тривиальных случаев может иногда составлять математическую ошибку; я не говорю здесь: «Не делайте ошибок». Дело в том, что отстаивание формально правильных, но недостаточно подробных объяснений («Утверждение верно в приведенной формулировке – чего вы еще хотите?») приводит к искаженному, плохому изложению, плохому в психологическом отношении. Оно может быть плохим и с точки зрения математики. Если, например, автор собирается обсуждать теорему о том, что, при соответствующих условиях, каждое линейное преобразование является произведением растяжений и вращения, но обходит молчанием случай нуля на

одномерном пространстве, то у читателя складывается неверное представление о поведении вырожденных линейных преобразований в общем случае.

Здесь, пожалуй, уместнее всего сказать несколько слов о формулировках теорем: именно в них, более, чем где бы то ни было, необходимо избегать не относящихся к делу деталей.

Первый вопрос по этому поводу: когда формулировать теорему? Мой ответ: сразу. Избегайте праздных бесед бог весть о чем, в конце которых внезапно объявляется: «Итак, мы доказали, что...». Читатель будет гораздо внимательнее к доказательству, когда он знает, что вы доказываете; ему будет яснее, где используются предпосылки, если он знает их. (Праздный подход часто приводит к теоремам, повисающим в воздухе, что, по-моему, безобразно. Я имею в виду такие пассажи: «Итак, мы доказали

Т е о р е м у 2. ...».

Такой перепад разрушает фразу; после того как читатель соберется с мыслями и сообразит, какую шутку с ним сыграли, этот прием произведет нежелательное отделение утверждения теоремы от ее формулировки.)

Я не хочу сказать этим, что теорема должна появляться без вводных замечаний, предварительных определений и вспомогательных мотивировок. Все это идет сначала; потом – формулировка, и, наконец, доказательство. Формулировка теоремы должна состоять, по возможности, из одной фразы: простой импликации, или, если некоторые общие предпосылки были сформулированы заранее и остаются в силе, – простого утверждения. Разговоры вроде: «Без нарушения общности мы можем предположить...» или «Более того, из теоремы 1 следует...» оставляйте за пределами формулировки.

В идеале утверждение теоремы – это не просто одна фраза, а фраза короткая. Теоремы, формулировки которых занимают почти всю страницу (или еще больше!), трудно воспринимать, труднее, чем следует. Они показывают, что автор не продумал материал, и не организовал его. Список из восьми предпосылок (даже если они аккуратно сформулированы) и список из шести утверждений – это не теорема: это – плохо изложенная теория. Все ли предпосылки нужны для каждого утверждения? Если ответ отрицателен, то очевидно, что формулировка плоха; если же ответ положителен, то, вероятно, предпосылки описывают некое общее понятие, которое заслуживает быть выделенным, специально названным и изученным.

11. Повторяйтесь и не повторяйтесь. Одно важное правило хорошего математического стиля требует повторений, а другое – требует избегать их.

Под повторением в первом правиле я подразумеваю не произнесение одной и той же вещи несколько раз с помощью разных слов. Я имею в виду дословное повторение фразы или даже нескольких фраз в изложении такого точного предмета, как математика, с той целью, чтобы подчеркнуть небольшие изменения в соседнем предложении. Если вы что-то определили, сформулировали или доказали в главе 1, а в главе 2 хотите заняться параллельной или более общей теорией, то вы очень поможете читателю, повторяя те же слова и в том же порядке, пока это возможно; только после этого, под приличествующий барабанный бой, введите новшество. Барабанный бой необходим. Недостаточно перечислить шесть прилагательных в одном

предложении, а в другом просто повторить пять из них, слегка ослабив шестое. Сверх этого нужно еще сказать: «Обратите внимание на то, что первые пять условий в определениях p и q одинаковы; различие между p и q заключено в ослаблении шестого условия».

Зачастую для того, чтобы поступить так в главе 2, вам придется вернуться к главе 1 и переписать в ней то, что вам казалось написанным уже достаточно хорошо, – на этот раз для подчеркивания параллелизма с соответствующей частью главы 2. Это, кстати, другая иллюстрация неизбежности спирального плана при сочинении, и другой аспект организации материала.

В предыдущих абзацах описывалась важная разновидность математического повторения – полезная; вот две другие – вредные.

Одна из причин, по которой повторение часто рассматривается как прием эффективного обучения, заключается в следующем: предполагается, что чем чаще вы повторяете одно и то же, тем более вероятно, что вы втолкуете сим материал. Я не согласен. Когда вы что-нибудь повторяете во второй раз, даже самый тупой читатель смутно припомнит, что ведь был и первый раз, и начнет спрашивать себя, то ли это самое, что уже было, или только похожее. (Тут может помочь фраза вроде: «Сейчас я говорю *в точности* то же самое, что впервые сказал на стр. 3».) Если хоть тень такого недоумения появляется, это плохо. Все то плохо, что без необходимости настораживает, развлекает по пустякам или каким-нибудь другим способом отвлекает внимание. (Нечаянные двусмысленности – проклятие многих авторов.) Кроме того, хорошая организация материала и, в частности, спиральный план, о котором речь шла выше, заменяют повторения гораздо эффективнее.

Вторая разновидность вредных повторений описана в короткой и лишь отчасти неточной заповеди: никогда не повторяйте доказательство. Если некоторые шаги в доказательстве теоремы 2 очень похожи на некоторые части доказательства теоремы 1, то это сигнал недопонимания. Вот другие симптомы этой болезни: «С помощью той же техники (того же метода, приема), которая применялась (или который использовался) в доказательстве теоремы 1...»; еще хуже: «См. доказательство теоремы 1». Когда случается такая вещь, то очень может быть, что на самом деле существует лемма, из которой с большой легкостью и ясностью выводятся обе теоремы; такую лемму стоит поискать, сформулировать и доказать.

12. Книжное «мы» не всегда плохо. Начинающих авторов часто беспокоит выбор между «я», «мы» и безличными формулировками. В случаях, подобных этому, здравый смысл важнее всего. По причинам целесообразности я выскажу здесь свои рекомендации.

Поскольку лучший стиль – наименее навязчивый, я склоняюсь к нейтральным оборотам. Но это *не* означает, что нужно один из них использовать чаще других или, того хуже, всегда. (Фразы типа: «итак, установлено, что...» ужасны.) Это означает полное отсутствие личных местоимений первого лица как в единственном, так и во множественном числе. «Так как имеет место p , q также справедливо...». «Из этого следует p ». «Применение p к q дает r ». Почти все (все?) математические сочинения –

информативны (или должны быть такими?); простые повествовательные предложения – лучшее средство для сообщения фактов.

Иногда эффективно и желательно использование повелительного наклонения. «Чтобы найти p , умножьте q на r ». «При данном p приравняйте q и r ». (Два отступления по поводу «Дано». (1) Не употребляйте это слово, когда оно ничего не обозначает. Например: «Для любого данного p существует q ». (2) Помните, что оно происходит от активного глагола и не любит болтаться просто так. Пример: не «если дано p , то существует q », а «для данного p найдем q ».)

Нет ничего худого в книжном «мы», но, если оно вам нравится, пользуйтесь им правильно. Пусть «мы» означает «автор и читатель» (или «лектор и аудитория»). Вы можете благополучно сказать «Используя лемму 2, мы можем обобщить теорему 1» или «Лемма 3 дает нам технику доказательства теоремы 4». Но не годятся утверждения вроде: «Мы получили этот результат в 1969 году» (если только это не будет голосом двух или более авторов, говорящих в унисон), или «Мы благодарим нашу жену за помощь при перепечатке рукописи».

Местоимение «я» и, особенно, его неизменное повторение, порой производит отталкивающий эффект, как высокомерие или проповеднический тон; по этой причине я стараюсь избегать его, где только возможно. В коротких заметках, в личных замечаниях, или в очерках вроде этого оно на своем месте.

13. Правильно используйте слова. Единицы информации, в порядке убывания, таковы: тема, глава, абзац, фраза, слово. Раздел о местоимениях был посвящен словам, хотя, в несколько более строгом смысле, он содержал рекомендации о стратегии стиля. Мой следующий совет, как он звучит в заголовке, не следует понимать прямолинейно; само собой разумеется, что слова надо использовать правильно. Но вот что я хочу подчеркнуть: следует тщательно обдумывать и точно дозировать слова, вызывающие к здравому смыслу и интуиции, с одной стороны, и специальные математические слова (технические термины), – с другой. Это может глубоко влиять на математический смысл.

Общее правило: корректно пользуйтесь терминами логики и математики. Я не призываю к педантизму и не предлагаю размножать технические термины для понятий, на волосок отличающихся друг от друга. Наоборот, я имею в виду мастерство настолько тонкое, чтобы оно не бросалось в глаза.

Вот пример: «Доказать, что какое-то (any) комплексное число является произведением некоторого неотрицательного числа и числа с модулем 1». У меня были студенты, которые доказывали это так: « $-4i$ – комплексное число; оно является произведением неотрицательного числа 4 и числа $-i$, имеющего модуль 1; это и требовалось доказать». Дело в том, что в разговорном английском языке слово « any » – двусмысленное; в зависимости от контекста оно может отвечать либо квантору существования либо квантору общности. Вывод: никогда не используйте слово « any » в математических сочинениях. Заменяйте его на « $every$ » или на « $each$ » или переделывайте фразу.

Вот один способ переделать фразу предыдущего абзаца, данную в качестве примера: условиться, что все «отдельные переменные» пробегают множество комплексных чисел, а потом написать нечто вроде такого выражения:

$$\forall z \exists p \exists u [(p = |p|) \wedge (|u| = 1) \wedge (z = pu)].$$

Я настоятельно советую не делать этого. Символика формальной логики необходима в обсуждении логики и математики, однако в качестве средства сообщения идей от одного смертного к другому она превращается в громоздкий шифр. Автор должен сначала перекодировать свою мысль (я отрицаю, что кто бы то ни было мыслит в терминах \exists , \forall , \wedge и т.п.), а затем читатель вынужден расшифровать написанное автором; оба шага приводят к растрате времени и затрудняют понимание. Символическая запись, все равно, в стиле современного логика или классического эпсилониста, – это текст, который могут писать машины, и едва ли кто-нибудь, кроме машин, может этот текст читать.

О слове « an_u » достаточно. А вот – другие нарушители, которые, правда, обвиняются в меньших преступлениях: «где», «эквивалентно», «если... то... если... то». «Где» – обычно знак того, что автор нехотя подумал о том, о чем должен был подумать заранее. «Если n достаточно велико, то $|a_n| < \varepsilon$, где ε – любое наперед заданное положительное число»; болезнь и лечение от нее ясны. Слово «эквивалентный» для теорем – логическая бессмыслица. (Под теоремой я подразумеваю математическую истину, нечто доказанное. Осмысленное утверждение может быть неверным, но теорема быть неверной не может: «неверная теорема» – внутренне противоречивый термин.) Какой смысл говорить, что полнота пространства L^2 эквивалентна теореме о представлении линейных функционалов на L^2 ? Имеется в виду, что доказательства обеих теорем – средние по трудности, и если одна из них (любая) уже доказана, то другую можно доказать с относительно меньшими усилиями. Логически точное слово «эквивалентный» здесь не годится.оборот «если... то... если... то» представляет собой стилистический прием, часто употребляемый скорыми авторами и огорчающий медлительных читателей. «Если справедливо p , то если имеет место q , то выполняется r ». Логически тут все в порядке ($p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$), но психологически на этом месте непременно споткнешься. Обычно нужно только переделать фразу; однако, универсального способа переделать ее нет. Все зависит от того, что важнее в данном конкретном случае. Можно так: «если p и q , то r »; или «при условии p из предположения q следует вывод r »; есть и многие другие варианты.

14. Правильно пользуйтесь техническими терминами. До сих пор речь шла, по существу, о логических аспектах стиля в математике. Теперь я хочу показать, что такое ненавязчивая точность языка в повседневной работе математика на трех примерах: функции, последовательности и включения.

Я принадлежу к школе, для которой функции и их значения – настолько разные вещи, что это различие должно соблюдаться. Не надо суетиться, по крайней мере на людях; просто старайтесь не произносить слова типа «функция $z^2 + 1$ – четная». Формулировка «функция f , определенная равенством $f(z) = z^2 + 1$ – четная», или, что предпочтительнее с многих точек зрения, «функция $z \rightarrow z^2 + 1$ – четная» немногим длиннее, но хорошая привычка к ней порой спасает читателя и автора от грубых заблуждений и всегда делает изложение более гладким.

«Последовательность» – это функция, область определения которой является множеством натуральных чисел. Когда какой-нибудь автор пишет «объединение последовательности измеримых множеств измеримо», он отвлекает внимание читателя на ложный путь. В этой теореме совершенно неважно, что первое множество является первым, второе – вторым и т.д.; слово *последовательность* не относится к делу. Правильная формулировка такова: «объединение счетного множества измеримых множеств измеримо» (или, если нужно иначе поставить акцент, – «объединение счетного бесконечного множества измеримых множеств измеримо»). Теорема о том, что «предел последовательности измеримых функций измерим» – совсем другое дело; здесь слово «последовательность» на месте. Если читатель знает, что такое последовательность, если у него это понятие в крови, то неправильное употребление этого слова будет его отвлекать и замедлять чтение, пусть совсем не намного. Если же читатель на самом деле не знает этого понятия, то неправильное его употребление серьезно отсрочит окончательное понимание.

Слова «содержать» и «включать» – почти всегда употребляются как синонимы, и часто теми же самыми людьми, которые старательно учат своих студентов, что символы \in и \subset – это вовсе не одно и то же. Совершенно не правдоподобно, что использование этих слов вперемешку приведет к недоразумению. Тем не менее, несколько лет назад я начал эксперимент, который продолжаю и теперь: я систематически устно и письменно использовал глагол «содержать» для \in и «включать» – для \subset . Едва ли я что-нибудь доказал этим, но могу сообщить, что (а) это очень легко; (б) вреда от этого – никакого; (в) думаю, что никто ни разу этого не заметил. Полагаю, хотя, по-видимому, это и недоказуемо, что такого сорта терминологическое постоянство (без суетливости) могло бы тем не менее сделать жизнь читателя (и слушателя) удобнее.

Постоянство, между прочим, – великое достоинство изложения, а непостоянство – смертный грех. Постоянство важно в языке, обозначениях, ссылках, разметке шрифтов – оно важно всюду, а его отсутствие может вызвать все, что угодно, начиная с легкого раздражения и кончая полной дезинформацией.

Мои советы об использовании слов можно резюмировать так. (1) Избегайте технических терминов, где только можно, и особенно старайтесь не сочинять новых. (2) Крепко подумайте над новыми терминами, если уж без них не обойтись. Справьтесь по словарю Роже и выберите их как можно удачнее. (3) Употребляйте старые термины правильно и всегда в одном и том же смысле, но без излишнего педантизма.

15. Воздерживайтесь от обозначений. Все сказанное об употреблении слов с соответствующими изменениями и оговорками применимо к еще более мелкой единице математического сочинения – к математическим символам. Лучшее обозначение – отсутствие обозначений. Где только возможно, избегайте громоздкого алфавитного аппарата. Хорошо готовить письменное математическое сообщение, представляя себе, что оно – устное. Вообразите, будто бы рассказываете все другу на какой-нибудь долгой лесной прогулке и у вас нет бумаги. Прибегайте к обозначениям только тогда, когда это необходимо.

Вот следствие из принципа «чем меньше обозначений, тем лучше их система»: не вводите ненужных букв, точно так же, как ненужных предложений. Пример: «На компактном пространстве всякая вещественнозначная непрерывная функция f ограничена». Зачем здесь f ? Разве утверждение от этого становится яснее? Другой пример: «Если $0 \leq \lim \alpha_n^{1/n} = \rho < 1$, то $\lim \alpha_n = 0$ ». Зачем тут ρ ? Ответ одинаков в обоих случаях (незачем), но причины присутствия лишних букв могут быть различны. В первом случае f может появиться в результате дурной привычки; во втором случае ρ , возможно, подготавливает доказательство. От дурной привычки можно отвыкнуть. С другим излишеством труднее, потому что здесь автор должен поработать. Без ρ в формулировке доказательство станет на полстрочки длиннее; его нужно будет начать как-нибудь так: «Положим $\rho = \lim \alpha_n^{1/n}$ ». Повторение (символа $\lim \alpha_n^{1/n}$) в этом случае целесообразно: и формулировка и доказательство читаются так легче и становятся естественнее.

Эффективная формулировка принципа «не используйте ненужных букв» такова: «Не используйте ни одну букву однократно». Логика сказала бы это так: «Не оставляйте свободных переменных». В приведенном выше примере о непрерывных функциях символ f является свободной переменной. Лучший способ исключить это f – опустить его. Иногда предпочтительнее превратить f из свободной переменной в связанную. Большинство математиков сделало бы это так: «Пусть f – вещественнозначная непрерывная функция на компактном пространстве; тогда f ограничена». Некоторые логики станут, вероятно, настаивать на том, что f – по-прежнему свободная переменная в новой фразе (дважды свободная) и, с технической точки зрения, они будут правы. Чтобы сделать f связанной переменной, необходимо в каком-нибудь грамматически подходящем месте вставить оборот «для всех f », но в математике общепринято молчаливое соглашение, по которому всякой фразе предшествуют все кванторы общности, нужные для обращения всех свободных переменных в связанные.

Правило «никогда не оставлять в предложении свободные переменные», как и многие другие правила, сформулированные мной, иногда лучше нарушать, чем соблюдать. В конце концов, фраза – это условная единица изложения и если вам хочется оставить висеть в ней свободную переменную f , чтобы позднее, скажем, в этом же абзаце, этой f воспользоваться, то не думаю, что вас обязательно нужно гнать из авторского полка. Тем не менее, это – здоровый принцип, он гибок, но бить его вдребезги не следует.

Существуют и другие логические тонкости, способные остановить, или, в лучшем случае, задержать читателя, если с ними небрежно обращаться. Предположим, например, что в каком-то пункте вы написали

$$(*) \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$$

как некоторую, скажем, теорему о фиксированной функции f . Если позже вы столкнетесь с другой функцией g , которая тоже обладает этим свойством, то

воспротивьтесь желанию сказать: « g также удовлетворяет (*)». Ведь это – бессмыслица с точки зрения и логики и обозначений. Вместо этого скажите «условие (*) остается верным, если заменить f на g » или, что еще лучше, назовите как-нибудь свойство (*) (в данном случае общепринятое название уже есть) и говорите так: « g тоже принадлежит пространству $L^2(0,1)$ ».

Что можно сказать о выражениях типа «неравенство (*)», «уравнение (7)» или «формула (iii)»? Следует ли отмечать либо нумеровать все, что вынесено между строк? Мой ответ: нет. Причина: бесполезные ярлычки не нужны так же, как излишние предпосылки или никчемные обозначения. Небольшая часть внимания отвлекается на этот значок и уголком мозга читатель станет думать, к чему бы это. Если номер и вправду нужен, то внимание читателя будет незаметно подготовлено к будущей ссылке на эту же идею, но если ни к чему, то внимание и ожидание пропали впустую.

Итак, пользоваться ярлычками следует скупно, но не впадайте в крайность. Я не советую поступать так, как однажды поступил Диксон [2]. На стр. 89 он говорит: «Затем... мы получаем (1)» – а ведь на стр. 89 начинается новая глава и там вообще нет ни одной выделенной формулы, тем более с номером (1). Оказывается, ссылка (1) находится на стр. 90, на обороте, а мне бы и в голову не пришло искать ее там. Минут пять я был в шоке после этой шутки; когда же, наконец, я увидел свет, то почувствовал себя околпаченным и замороченным, и уже никогда не простил этого Диксону.

Громоздкие обозначения часто возникают при проведении индукции. Порой это неизбежно. Однако чаще достаточно объяснить переход от 1 к 2 и заключить воздушным «и так далее». Это не проигрывает в строгости подробным вычислениям, зато гораздо понятнее и убедительнее. Точно так же какое-нибудь общее утверждение об $(n \times n)$ -матрицах часто лучше всего доказывается не подробным выписыванием всевозможных символов a_{ij} с многоточиями, расположенными горизонтально, вертикально и по диагонали, а рассмотрением типичного частного случая (скажем 3×3).

Во всех моих рассуждениях о вреде обозначений есть своя логика. Дело в том, что для глупой вычислительной машины существует лишь одно строгое понятие математического доказательства. Для человеческого же существа, одаренного геометрической интуицией, ежедневно растущим опытом, нетерпением и неспособностью сосредоточиться на надоедливых деталях, это не годится. Еще одним примером тому может служить любое доказательство, состоящее из цепи выражений, соединенных знаками равенства. Такое доказательство легко написать. Автор начинает с первого равенства, совершает естественную подстановку, чтобы получить второе, группирует, переставляет, вносит и тут же вдохновенно сокращает множители и так продолжает до тех пор, пока не получит последнее равенство. Это – опять-таки разновидность кодирования, и читателю приходится одновременно расшифровывать и учиться по ходу дела. Такое удвоение работы бессмысленно. Если автор потратит лишние десять минут и напишет абзац тщательно обдуманных слов, он сэкономит полчаса времени каждого из читателей и избавит их от лишних недоумений. Такой абзац должен представлять собой руководство к действиям, заменив бесполезный шифр, который лишь сообщает результаты действий и

оставляет читателю гадать, как они получились. Руководство должно быть примерно таким: «Для доказательства подставим p вместо q , затем сгруппируем члены, переставим множители и, наконец, умножим и разделим на множитель r ».

Известный прием плохого обучения – начинать доказательство со слов: «Для данного ε положим δ равным $(\varepsilon/(3M^2 + 2))^{1/2}$ ». Это – восходящий к традициям классического анализа способ писать доказательство от конца к началу. Его преимущество в том, что его легко *проверить* машине (но трудно *понять* человеку). Еще одно сомнительное преимущество этого же способа состоит в том, что в самом конце нечто оказывается меньше ε , а не, скажем, $(\varepsilon(3M^2 + 7)/24)^{1/2}$. Как облегчить в данном случае жизнь читателю, очевидно: напишите доказательство от начала к концу. Начните, как всегда начинают авторы, фиксируя нечто меньшее, чем ε , а потом делайте все, что нужно делать – когда нужно, умножайте на $3M^2 + 7$, потом – делите на 24 и т.д. и т.д. – пока не выйдет то, что выйдет. Ни одно из расположений материала не отличается изяществом, но второй способ по крайней мере легче схватывается и запоминается.

16. Правильно используйте обозначения. Со специальными знаками много вреда не наделаешь, но и здесь полезно быть последовательным и избегать в отдельности незаметных, а в совокупности разъедающих злоупотреблений. Например, хорошо использовать символ с таким постоянством, чтобы его словесный эквивалент был всегда одним и тем же. Это – хорошо, но почти невозможно. Тем не менее, лучше стремиться хоть к этому, чем ни к чему. Как следует читать \in : как сказуемое «лежит в» или как предлог «в»? Как правильно сказать: «Для всех $x \in A$ имеем $x \in B$ » или «Если $x \in A$, то $x \in B$ »? Я решительно предпочитаю последнее (всегда читаю \in как «лежит в») и вдвойне осуждаю первое (ведь оба чтения встретились в одной фразе). Легко написать и легко прочитать: «Для всех x из A мы имеем: $x \in B$ »; диссонанс и легкая двусмысленность обойдены. То же самое относится к \subset , несмотря на то, что словесный эквивалент здесь длиннее, и даже к символу \leq . Фраза типа «Если только положительное число ≤ 3 , то его квадрат ≤ 9 » уродлива.

Не только абзацы, фразы, слова, буквы и математические символы, но и невинные с виду знаки обычного повествования могут служить источником недоумения; я имею в виду знаки препинания. Достаточно пары советов. Первый: уравнение, неравенство или включение, или любое другое математическое выражение, по своему содержанию эквивалентно некоторому предложению обычного языка и поэтому оно должно отделяться от соседних с ним выражений. Другими словами: расставляйте знаки препинания в символических фразах как в обычных словесных предложениях. Второй совет: не перетруждайте такие мелкие знаки, как точка или запятая. Читатель легко может проглядеть их, а такая оплошность вынуждает вернуться назад, вызывает замешательство, задерживает. Пример: «Предположим, что $a \in X$. X принадлежит классу C, \dots ». Точка между двумя буквами X несет излишнюю нагрузку. Вот еще: «Предположим, что X обращается в

нуль. X принадлежит классу C , ...». Хорошее общее правило: никогда не начинайте фразу с символа. Если уж вы непременно хотите начать фразу с упоминания объекта, который обозначается данным символом, то и поставьте подходящее слово в самом начале: «Множество X принадлежит классу C , ...».

Перетруженная точка не хуже, чем перетруженная запятая. Не пишите «Если X обратим, X^* также обратим»; лучше: «Если X обратим, то и сопряженный к нему X^* также обратим». Не пишите также «Так как $p \neq 0$, $p \in U$ »; вместо этого пусть будет: «Из того, что $p \neq 0$, следует, что $p \in U$ ». Даже обычная фраза «Не хотите, не надо» (т. е. ее математические эквиваленты) усваивается хуже, чем напыщенное «Если вам это и не нравится, то придется вам это проглотить». Я рекомендовал бы ставить после «если» «то» во всех математических текстах. Наличие слова «то» никогда не приведет к недоразумению, а вот его отсутствие – может.

Последняя техническая деталь, которая может помочь в писательской работе, и которую здесь следует упомянуть, в некотором смысле еще меньше, чем знаки препинания, в некотором смысле она просто невидима, но в другом смысле она заметнее всего на печатной странице. Я говорю о плане, архитектуре, внешнем виде страницы самой по себе и, вообще, всех страниц.

Опыт писательской работы и, возможно, трезвого и критического чтения должен придать вам способность чувствовать, как будет смотреться в напечатанном виде то, что вы пишете сейчас. Если текст выглядит как плотная проза, то в печати он приобретет вид непривлекательной проповеди; если это – вычислительная мешанина, и страница набита формулами, то в напечатанном виде текст будет пугать своей сложностью. Лучше всего – золотая середина. Делите текст, но не дробите его; пользуйтесь словесными периодами, но не слишком длинными. Выносите формулы между строк, чтобы глаза могли помогать мозгу; применяйте символы, но перекладывайте их словами, чтобы внимание не плутало в чаще индексов.

17. Всякое сообщение требует организации. Выше я уже говорил, а сейчас хотел бы подчеркнуть это вновь, что различия между книгами, статьями, лекциями и письмами и всеми иными способами сообщения, какие вы можете придумать, меньше, чем сходство.

Когда вы пишете исследовательскую статью, роль «клочков бумаги», из которых составляется набросок книги, могут играть открытые вами теоремы и доказательства; вам все равно придется раскладывать из них пасьянс.

С лекцией дело обстоит немного иначе. Поначалу лекция – это статья; вы планируете ее и пишете как статью. Различие состоит в том, что вам приходится держать в уме трудности устного ее воспроизведения. Читатель может разрешить себе отвлечься, а потом вновь ухватить нить повествования, не потеряв ничего, кроме собственного времени. Слушатели в аудитории не могут себе этого позволить. Читатель может попытаться доказать ваши теоремы самостоятельно, используя при этом ваше изложение как контролирующее подспорье, а слушатель не может этого сделать. Продолжительность очередной порции читательского внимания довольно коротка, а у слушателя она намного короче. Если вычисления неизбежны, то читателя можно им подвергнуть, а слушателя – никогда. Половина искусства хорошо писать – это искусство

пропускать; для лектора искусство пропускать составляет девять десятых дела. Здесь различия еще невелики. Даже хорошо написанная статья, прочитанная вслух, может оказаться ужасной лекцией; она, однако, не будет хуже некоторых лекций, которые мне доводилось слушать.

Для лектора вид печатной страницы заменяется видом доски, а воображаемая автором аудитория – живыми людьми. Это уже значительные различия. Доска открывает возможности, которых нет у листа бумаги: на ней можно показать, как тема живет и растет. (Лекторы, подготовляющие доску заранее и записывающие ее целиком до того, как начинают говорить, поступают неразумно и недоброжелательно по отношению к слушателям.) Живые люди обеспечивают мгновенную реакцию на сказанное; для автора текста это – недостижимая мечта.

Основные проблемы общения при изложении во всех случаях одинаковы; их я и описал в этом очерке. Содержание, цель и организация изложения, плюс жизненно важные детали грамматики, стиля и обозначений, но ни в коем случае не показательные трюки, – вот основные составляющие элементы хороших лекций и хороших книг.

18. Отстаивайте свой стиль. Ровная, последовательная, эффективная манера изложения имеет своих врагов; эти враги называются помощниками редактора или корректорами.

Редактор может оказать огромную помощь автору текста. Обычно авторы математических текстов живут без этой помощи, потому что редактор математической книги должен быть математиком, а редакторов-математиков очень мало. Идеальный редактор, который в принципе должен разбираться в теме до мелочей, может высказать квалифицированную, но беспристрастную точку зрения на проделанную автором работу; сам автор этого сделать не может. Идеальный редактор представляет собой объединение друга, жены, ученика и студента младшего курса, роль которых в создании книг описана выше. Математические редакторы книжных серий и журналов даже близко не подходят к этому идеалу. Издательская работа является лишь небольшой частью их жизни, тогда как для хорошего редактора она должна целиком заполнять рабочий день. Идеального математического редактора не существует; комбинация друг – жена – и т. д. – лишь почти идеальная замена.

Помощник редактора – это весь день работающий сотрудник, задача которого состоит в обнаружении вашей непоследовательности, ваших грамматических и стилистических ошибок – словом, всевозможных огрехов, за исключением математических. Беда в том, что помощник редактора не рассматривает себя как продолжение автора, а, как правило, вырождается в робота, некстати применяющего механически механические правила. Позвольте привести некоторые примеры.

Однажды я изучал некоторые преобразования, названные «measure-preserving»². (Обратите внимание на дефис: он играет важную роль, соединяя два слова в одно прилагательное.) Соответствующим свойством не обладали другие преобразования, участвующие в изложении; разумеется, на это обстоятельство было указано с помощью приставки «non». После длинного ряда неверно понятых указаний в верстке появились «non measure preserving

transformations». Конечно, это – бессмыслица, хоть и забавная, но отвлекающая и неприятная.

Один знакомый математик говорил, что в рукописи своей книги он написал нечто вроде следующего: « p или q имеют место в зависимости от того, является ли, соответственно, x отрицательным или положительным». Помощник редактора исправил это так: « p или q имеют место в зависимости от того, является ли, соответственно, x положительным или отрицательным»; ему показалось, что так фраза звучит лучше. Это было бы смешно, если бы не было так грустно, и, конечно, совершенно ошибочно.

Общая жалоба всех, когда-либо обсуждавших с помощником редактора вопрос о кавычках, связана с отношением кавычек к другим знакам препинания. По-видимому, существует международное соглашение печатников, согласно которому точка или запятая сразу после кавычек «некрасивы». (Как здесь: помощник редактора исправил бы конец фразы на «некрасивы.»⁸, если бы я ему это позволил.) С точки зрения логичного математика (и тем более, математического логика) такое соглашение не имеет смысла; запятая или точка должны появляться там, где того требует логика ситуации. Например: Он сказал: «Запятая – это некрасиво.»⁸. Здесь, очевидно, точка относится к закавыченной фразе; две описанные ситуации различны и никакое негибкое правило нельзя применить к ним обеим.

Мораль: существуют правила «стиля» (чаще всего это – типографские условности), но их механическое применение помощниками редактора может оказаться губительным. Если вы хотите быть автором, то вы должны быть готовы защищать свой стиль и драться за него.

19. Поставьте точку. Битва с корректорами – последняя задача автора; однако не многие авторы так считают. Психологически последний шаг делается перед этим; он состоит в том, чтобы закончить книгу – перестать писать. Это трудно.

Всегда находится что-то недоделанное, всегда можно кое-что сказать еще, или удачнее выразить уже сказанное; в лучшем случае остается смутное чувство, что еще немного – и можно было бы достичь совершенства, отказавшись от которого, обречешь себя на вечное раскаяние. Я пишу это, сожалея, что не включил один-два абзаца о благозвучии и просодии в математическом тексте. И потом, минуточку! Нельзя же закончить, не обсудив, как правильно называть понятия (почему «коммутатор» – это хорошо, а «множество первой категории» – плохо) и теоремы (почему «теорема о замкнутом графике» – это хорошо, а «теорема Коши-Буняковского-Шварца» – плохо). Да, и вот еще маленькая заповедь, которую мне все не удавалось как следует сформулировать: выберите себе образец, хотел я сказать, человека, чьи книги вас учат и увлекают, приспособьте его стиль к вашей личности и вашей теме... Уж это-то следует написать где-нибудь.

У этой задачи – одно решение, очевидное: единственный способ остановиться – быть безжалостным к себе. Вы можете и должны ненадолго отсрочить агонию, вычеркивая текст, проверяя вычисления, или отложив рукопись для созревания и затем перечитывая ее целиком на едином вздохе; но и после всего этого ваш пыл не остынет.

Когда вы написали все, что пришло вам в голову, выделите денек-другой, чтобы быстро прочесть рукопись и проверить самое существенное, что может броситься в глаза со стороны. Все ли хорошо с математической точки зрения? Интересно ли изложение? Понятен ли язык? Удачна ли и легка для чтения композиция? После этого вычитывайте и проверяйте вычисления. Это – очевидный совет; все знают, как это делать. Что такое «дозревание» – легко объяснить, но не всегда легко выполнить: для этого нужно убрать рукопись с глаз долой и попытаться забыть о ней на несколько месяцев. Когда вы все это сделали и перечитали работу спокойно, вы сделали все, что могли. Не пытайтесь получить еще хоть один результат, перестаньте зализывать шероховатости. Даже если вы и получите этот результат и сгладите острый угол, вам захочется пуститься в погоню за новым миражем.

Я подытоживаю: начинайте с начала, и продолжайте, пока не придете к концу, а потом поставьте точку.

20. Заключительное слово. Я исчерпал все советы по поводу математического сочинения, которые смог вместить в один очерк. Мои рекомендации основаны частично на том, что делаю я сам, в большей степени – на том, чего я, к сожалению, не смог сделать, и в еще большей степени – на том, что я хотел бы получать от других. Вы можете критиковать меня с многих точек зрения, но только не сравнивайте мои нынешние заповеди с моими прошлыми делами. Делайте, пожалуйста, так, как я говорю, а не так, как я делаю – да сопутствует вам удача. Потом перепишите этот очерк и объясните следующему поколению, как работать еще лучше.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G.D.Birkhoff, *Proof of ergodic theorem*, Proc. N.A.S USA **17** (1931), pp.656-660. [назад к тексту](#)
- [2] L.E.Dickson, *Modern algebraic theories*, Sandborn, Chicago, 1926. [назад к тексту](#)
- [3] N.Dunford, J.T.Schwartz, *Linear operators*, Interscience, N.Y. 1958, 1963. [назад к тексту](#)
- [4] H.W.Fowler, *Modern English usage* (Second Edition), Oxford, N.Y., 1965. [назад к тексту](#)
- [5] C.T.Heisel, *The circle squared beyond refutation*, Heisel, Cleveland, 1934. [назад к тексту](#)
- [6] S.Lefschetz, *Algebraic topology*, A.M.S., N.Y., 1942. [назад к тексту](#)
- [7] E.Nelson, *A proof of Liouville's theorem*, Proc. A.M.S. **12** (1961), p.995. [назад к тексту](#)
- [8] *Roget's International Thesaurus*, Crowell, N.Y., 1946. [назад к тексту](#)
- [9] J.Thurber, E.Nugent, *The male animal*, Random House, N.Y., 1940. [назад к тексту](#)
- [10] *Webster's New International Dictionary*, Merriam, Springfield, 1951. [назад к тексту](#)

- 1. P.R. Halmos, *How to write mathematics*, L'Enseignement Math. **16:2** (1970) 123-152. Перевод с англ. выполнен А. А. Бельским. [назад к тексту](#)
- 2. «На том стою, и не могу иначе» (немецк.). (Прим. перев.) [назад к тексту](#)
- 3. Согласно философии Платона все знания и навыки заложены в каждого человека изначально, а жизнь – это, в некотором смысле, период, в течение которого люди «вспоминают» все то, что знают и умеют. (Прим. перев.) [назад к тексту](#)
- 4. Continuous – по-английски – непрерывный. (Прим. перев.) [назад к тексту](#)
- 5. Easy – по-английски – легко. (Прим. перев.) [назад к тексту](#)
- 6. Ср. также высказывание Л. М. Леонова: «Если меня заставят писать „огурци“, я не буду есть этих огурцев!» (Прим. ред.) [назад к тексту](#)

7. Сохраняющие меру. (*Прим. перев.*) [назад к тексту](#)

8. В русском языке соответствующее правило требует постановки точки в конце фразы, независимо от того, входят ли в нее обороты, взятые в кавычки. В первом случае конец фразы должен выглядеть так, как хочет автор: «некрасивы». Во втором случае: (Он сказал: «Запятая – это некрасиво».) мы имеем дело с одной фразой и точка должна стоять после кавычек, а не внутри их. (*Прим. ред.*)